té un nivell més assequible que el de Tao, i està més dedicat a la divulgació. Per exemple, té una sèrie molt interessant de dotze articles sobre les propietats del grup simètric $\mathcal{S}_n$.

Finalment, us vull recomanar una pàgina a la qual he arribat a través del bloc de Tao, titulada *Detexify*, que us pot ser de gran ajuda en les vostres aventures amb el TEX. No us heu trobat mai que voleu escriure un determinat símbol matemàtic en TEX i no sabeu la comanda? Abans, havies d'anar a les llargues llistes de comandes publicades als llibres de TEX o a webs especialitzades. Aquesta web permet escriure el símbol amb el ratolí i et mostra a la dreta una llista de les comandes de TEX compatibles amb el símbol que s'ha escrit. Proveu-ho. És espectacular i molt útil! Ah, l'adreça és http://detexify.kirelabs.org/classify.html.

Josep Burillo
UPC

Problemes

En el número anterior de la *SCM/Notícies* dèiem que la festa del problema centè no era completa perquè els problemes **B47** (*SCM/Notícies* 14) i **A64** (*SCM/Notícies* 20) encara no havien estat resolts. Una agradable sorpresa, però: en el punt de tancar la secció d'aquest número hem rebut una solució del problema **B47**, la qual, mancats de temps per a fer-hi un treball rigorós ara, serà publicada en el proper número de la *SCM/Notícies*. Algú s'anima amb l'**A64**?

En aquest número, per deferència dels nostres amables col·laboradors José Luis Díaz-Barrero, i Xavi Ros Otón, tots dos de la UPC; Barcelona, Joaquim Nadal i Vidal, de l'Institut de Cassà de la Selva, i Miquel Amengual Covas de Cala Figuera, Mallorca, tenim quatre reptes més, de l'**A105** a l'**A108**, dirigits a estimular les habilitats i coneixements dels nostres fidels lectors.

També publiquem les solucions dels problemes del número anterior de la *SCM/Notícies*: Xavi Ros Otón és l'autor de l'única solució rebuda del problema **A101**. Gerard Planes i Conangla (FME, UPC, Barcelona) ens envia la solució del problema **A102** que apareix més avall; Joaquim Nadal i Vidal i Xavi Ros Otón també n'han aportat sengles solucions i, finalment, Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo) ens n'envia vàries, amb notes bibliogràfiques i webgràfiques, que també publiquem. Del problema **A103** n'hem rebut tres solucions, de Joaquim Nadal i Vidal, Bruno Salgueiro Fanego i Miquel Amengual Covas, respectivament, i publiquem la del primer. Finalment, del problema **A104** en publiquem una solució de Bruno Salgueiro Fanego, que fa un ús intensiu dels nombres complexos com a objectes geomètrics. També hem rebut solucions de Joaquim Nadal i Vidal i de Ramon González Calvet, de l'Institut Pere Calders de Cerdanyola del Vallès, que fan servir, també intensament, l'àlgebra geomètrica, mentre que Miquel Amengual Covas ens en dóna notes bibliogràfiques. Aquest redactor, però, no ha pogut resistir la temptació de mostrar una solució que només usa geometria mètrica elemental.

Acabem aquest preàmbul expressant el nostre agraïment als col·laboradors de la secció, tant als proponents com als resolvents i recordant-vos que els fitxers TEX o LaTEXens faciliten molt la feina, tot i que les aportacions en qualsevol altre format, també manuscrits, són igualment ben rebudes. Les adreces de correu per a enviar-nos-les són cromero@xtec.cat, o bé, carles.romero.c@gmail.com. Fins la propera!

Problemes proposats

A105. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.) Siguin a, b, c i d quatre nombres reals i positius que compleixen que $abcd = 1$. Demostreu que

$$\frac{a^9+b^7}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b^9+c^7}{c^2+d^2+a^2}+\frac{c^9+d^7}{d^2+a^2+b^2}+\frac{d^9+a^7}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{8}{3}\,.$$

A106. (Proposat per Xavi Ros Otón, FME, UPC.) Sigui $\{a_n\}$ una successió de nombres reals i positius. Proveu que si la sèrie $\sum a_n$ és convergent, aleshores també ho és la sèrie $\sum b_n$, en la qual

$$b_n=\frac{a_n}{\sqrt{\sum_{k\geq n}a_k}}\,.$$

A107. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva.) Demostreu que, per tot nombre natural $a>1$ d'expressió decimal amb xifra de les unitats 1, 3, 7 o 9 i per tot nombre natural n, hi ha $k\in\mathbb{N}$ de manera que a^k, expressat en base 10, té com a darreres xifres n zeros i un u.

A108. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) $ABCD$ és un quadrilàter convex en el qual $\widehat{ABC}=90^\circ$ i, a més,

$$\frac{AD}{BC}=\frac{CD}{AB}=\frac{BD}{AC}$$

Provau que aquest quadrilàter és un rectangle.

Solucions

A101. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.) Siguin a, b i c tres nombres positius amb $ab+bc+ca=1$. Demostreu que

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^4\left(a^2\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}+b^2\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}}+c^2\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}\right)^3\geq\frac{1}{2}\,.$$

Solució: (Solució de Xavi Ros Otón, FME-UPC.) En primer lloc observem que

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-ca=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}\geq 0$$

i, aleshores,

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca=1\,.$$

Per tant, n'hi ha prou a demostrar que

$$a^2\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}+b^2\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}}+c^2\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\quad(*)$$

Per fer-ho, establirem primer la desigualtat següent: siguin $p\geq 1$ i $\alpha\geq 0$; aleshores

$$a^p\left(\frac{a}{b+c}\right)^\alpha+b^p\left(\frac{b}{c+a}\right)^\alpha+c^p\left(\frac{c}{a+b}\right)^\alpha\geq\frac{(a+b+c)^p}{3^{p-1}2^\alpha}\,.\qquad(**)$$

En efecte, definim $s=a+b+c$ i

$$f\colon(0,s)\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$f(x)=x^p\left(\frac{x}{s-x}\right)^\alpha\,.$$

Aleshores,

$$f(a)=a^p\left(\frac{a}{s-a}\right)^\alpha=a^p\left(\frac{a}{b+c}\right)^\alpha$$
$$f(b)=b^p\left(\frac{b}{s-b}\right)^\alpha=b^p\left(\frac{b}{c+a}\right)^\alpha$$
$$f(c)=c^p\left(\frac{c}{s-c}\right)^\alpha=c^p\left(\frac{c}{a+b}\right)^\alpha$$

i

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=\frac{(a+b+c)^p}{3^p2^\alpha}=\frac{1}{3}\,\frac{(a+b+c)^p}{3^{p-1}2^\alpha}$$

i la desigualtat $(**)$ és equivalent a

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\,.\qquad(***)$$

Fent ús de la desigualtat de Jensen, la certesa de $(***)$ quedarà demostrada si aconseguim provar que la funció f és convexa. Fent uns quants càlculs, resulta

$$f''(x)=\left(\frac{x}{s-x}\right)^\alpha\frac{x^{p-2}}{(s-x)^2}\big(p(p-1)x^2-2s(p-1)(p+\alpha)x+s^2(p+\alpha)(p+\alpha-1)\big)$$

i per veure que, en el domini $(0, s)$, la segona derivada és positiva, només cal demostrar que

$$p(p-1)x^2 - 2s(p-1)(p+\alpha)x + \\ + s^2(p+\alpha)(p+\alpha-1) \geq 0\,.$$

Ara bé, l'expressió anterior és una equació quadràtica i, si fem uns quants càlculs més, n'obtenim aquest afitament pel discriminant

$$\begin{aligned}\Delta &= 4s^2(p-1)^2(p+\alpha)^2 - \\ &\quad - 4p(p-1)s^2(p+\alpha)(p+\alpha-1) = \\ &= 4s^2(p-1)(p+\alpha)((p-1)(p+\alpha) - \\ &\quad - p(p+\alpha-1)) = \\ &= -4\alpha s^2(p-1)(p+\alpha) \leq 0\,.\end{aligned}$$

Resulta, doncs, que efectivament,

$$p(p-1)x^2 - 2s(p-1)(p+\alpha)x + \\ + s^2(p+\alpha)(p+\alpha-1) \geq 0$$

i, per tant, $f''(x) \geq 0$ i la funció f és convexa, la relació $(***)$ no és res més que la *desigualtat de Jensen* i la desigualtat $(**)$ queda demostrada.

Finalment, posant $p = 2$ i $\alpha = \dfrac{1}{3}$ i tenint en compte que

$$(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \\ = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

obtenim

$$a^2\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + b^2\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + c^2\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} \geq \\ \geq \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt[3]{2}} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,.$$

tal com volíem demostrar.

A102. (D'una Olimpíada de fa molts, molts anys.) Sigui a un nombre real fixat i sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció que compleix

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

per tot nombre real x. Demostreu que f és una funció periòdica i doneu-ne un exemple pel cas $a = 1$.

Solució: (Solució de Gerard Planes i Conangla, FME-UPC.) Busquem l'expressió de $f(x+2a)$:

$$\begin{aligned}f(x+2a) &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - (f(x+a))^2} = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + A - \left(\frac{1}{2} + A\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + A - \left(\frac{1}{4} + f(x) - (f(x))^2 + A\right)} = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + A - \frac{1}{4} - f(x) + (f(x))^2 - A} = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + (f(x))^2} = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} = f(x)\,,\end{aligned}$$

on $A = \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$. Per tant, $f(x)$ és $2a$-periòdica. Un exemple en seria una ona quadrada definida a tot $\mathbb{R}$ amb

$$f(x) = \begin{cases} = \dfrac{1}{2}, & \text{si } x \in [0, a) \\ = 1, & \text{si } x \in [a, 2a) \end{cases}$$

i estenent-la periòdicament.

Notes: (Bruno Salgueiro, Viveiro, Lugo.)

Una crònica de la desena International Mathematical Olympiad (IMO), celebrada a Moscou el 1968, en què hi ha els enunciats i les solucions dels sis problemes que s'hi van proposar la trobareu a http://www.imo-register.org.uk/1968-report-st.html . Aquest problema en fou el cinquè.

Igualment, el problema i la solució apareixen a les pàgines 18 i 19 de l'article de Daniel Lasaosa «Algunas técnicas de resolución de ecuaciones funcionales en problemas de Olimpiada (I): Funciones reales de variable real», a la *Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática*, núm. 30, març-abril de 2007. L'esmentada revista es publica només en línia http://www.oei.es/oim/revistaoim/.

També podreu trobar l'enunciat i solucions d'aquest problema a:

- Greitzer, Samuel L. *International Mathematical Olympiads 1959-1977*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1978, a la pàgina 10 l'enunciat, i a la 109 i 110 la solució.
- Reiman, István. *International Mathematical Olympiads 1959-1999*, London: Anthem Press, 2001, a la pàgina 14 l'enunciat, i a la 133 i 134 dues solucions.
- Becheanu, Mircea. I*nternational Mathematical Olympiads 1959-2000*. Freeland, Maryland: The

Academic Distribution Center, 2001, a la pàgina 66 i 67.

A103. (Proposat per Xavi Ros Otón, FME-UPC.) Siguin R i r els radis de les circumferències inscrita i circumscrita a un triangle. Proveu que

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{A}{H},$$

expressió en què A i H representen, respectivament, la mitjana aritmètica i la mitjana harmònica dels costats del triangle.

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva.) Necessitem un lema previ: si B, C i D són els angles d'un triangle, aleshores

$$z = \sin B \sin C + \sin B \sin D + \\ + \sin C \sin D \leq \frac{9}{4} \qquad (*)$$

En efecte: fixem l'angle D i posem $K = 180° - D$; aleshores

$$C = 180° - B - D = K - B\,.$$

Considerem ara $u = \sin B \sin C = \sin B \sin(K - B)$ i derivem u respecte de B per buscar-ne màxims:

$$\begin{aligned} u' &= \cos B \sin(K-B) - \sin B \cos(K-B) = \\ &= \sin((K-B)-B) = \sin(K-2B) \\ u'' &= -2\cos(K-2B)\,. \end{aligned}$$

Per tal que $u' = 0$, ha de ser $\sin(K - 2B) = 0$, i $K = 2B$ dóna el punt estacionari

$$B = \frac{K}{2} = C$$

i, com que

$$u''\left(\frac{K}{2}\right) = -2\cos\left(K - 2\,\frac{K}{2}\right) = \\ = -2\cos 0 = -2 < 0$$

es tracta d'un màxim.

Estudiem ara $v = \sin B + \sin C = \sin B + \sin(K - B)$ i, de la mateixa manera, busquem-li un màxim:

$$\begin{aligned} v' &= \cos B - \cos(K-B) \\ v'' &= -\sin B - \sin(K-B)\,. \end{aligned}$$

Per $B = K - B$, és a dir, per

$$B = \frac{K}{2} = C$$

tenim un punt estacionari en el qual la segona derivada val

$$v''\left(\frac{K}{2}\right) = -\sin\frac{K}{2} - \sin\left(K - \frac{K}{2}\right) = \\ = -2\sin\frac{K}{2} < 0$$

perquè $0° < \dfrac{K}{2} < 180°$. També és un màxim. Si u i v maximitzen el seu valor en el mateix lloc, quan $B = \frac{K}{2} = C$, aleshores, per a cada D, el valor de

$$z = u + v\sin D$$

serà màxim quan $B = C$. Tenim, doncs,

$$z = \sin^2 B + 2\sin B \sin D$$

i, com que, $D = 180° - 2B$,

$$\begin{aligned} z &= \sin^2 B + 2\sin B \sin 2B = \\ &= \sin^2 B + 4\sin^2 B \cos B = \\ &= \sin^2 B(1 + 4\cos B)\,. \end{aligned}$$

Busquem ara els extrems de $z(B)$:

$$\begin{aligned} z'(B) &= \\ &= 2\sin B\cos B(1+4\cos B) - 4\sin^3 B = \\ &= 2\sin B\left(\cos B + 4\cos^2 B - 2\sin^2 B\right) = \\ &= 2\sin B\left(\cos B + 6\cos^2 B - 2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''(B) &= 2\cos B\left(\cos B + 6\cos^2 B - 2\right) - \\ &\quad - 2\sin B(\sin B + 12\cos B\sin B) = \\ &= 2\left(\cos B\left(\cos B + 6\cos^2 B - 2\right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 B(1 + 12\cos B)\right)\,. \end{aligned}$$

Per a $z'(B) = 0$ les possibilitats són:

a) Que $\sin B = 0$, cosa impossible si el triangle és no degenerat.

b) Que $6\cos^2 B + \cos B - 2 = 0$, amb la solució impossible $\cos B = -\dfrac{2}{3}$, que implica que $B = C$ són obtussos, i la solució $\cos B = \dfrac{1}{2}$, que implica $B = C = 60°$ i, per tant $D = 60°$. En aquestes condicions

$$u''(60°) = 2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 6\frac{1}{4} - 2\right) - \right. \\ \left. - \frac{3}{4}\left(1 + 12\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{21}{2} < 0$$

i $B = C = D = 60°$ fa un màxim.

Tenim, en definitiva, que el valor màxim de z és

$$z(60^\circ) = \frac{3}{4}(1 + 4\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$$

i això acaba la demostració del lema $(*)$.

Passem ara a la demostració de la desigualtat inicial: siguin b, c i d els tres costats del triangle, oposats respectivament als angles B, C i D. Tenim que

$$A = \frac{b+c+d}{3}$$

$$H = \frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} = \frac{3bcd}{bc+cd+db}$$

$$\frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{d}{2\sin D} = R$$

$$[\triangle BCD] = bc\sin D = bd\sin C = cd\sin B = (b+c+d)r$$

$$2r = \frac{2bc\sin D}{b+c+d} = \frac{2bd\sin C}{b+c+d} = \frac{2cd\sin B}{b+c+d}\,.$$

Ara, a partir del lema $(*)$, podem escriure

$$2[\triangle BCD]\frac{9-4(\sin B\sin C+\sin B\sin D+\sin C\sin D)}{4\sin B\sin C\sin D} \geq \geq 0$$

o sigui,

$$\frac{3-4\sin B\sin C}{4\sin B\sin C\sin D}\,bc\sin D + + \frac{3-4\sin B\sin D}{4\sin B\sin C\sin D}\,bd\sin C + + \frac{3-4\sin C\sin D}{4\sin B\sin C\sin D}\,cd\sin B \geq 0$$

és a dir

$$bc\left(\frac{3}{4\sin B\sin C}-1\right)+bd\left(\frac{3}{4\sin B\sin D}-1\right)+ + cd\left(\frac{3}{4\sin C\sin D}-1\right)\geq 0$$

i, aleshores,

$$3\,\frac{b}{2\sin B}\,\frac{c}{2\sin C}+3\,\frac{b}{2\sin B}\,\frac{d}{2\sin D}+ + 3\,\frac{c}{2\sin C}\,\frac{d}{2\sin D}\geq bc+bd+cd$$

que dóna

$$3R^2+3R^2+3R^2 = 9R^2 \geq bc+bd+cd\,.$$

Ara substituïm R per $\dfrac{b}{2\sin B}$:

$$9\,\frac{b^2}{4\sin^2 B}\geq bc+bd+cd$$

i dividim per $3bcd$:

$$\frac{3b}{4cd\sin^2 B}\geq\frac{bc+cd+db}{3bcd}=\frac{1}{H}\,.$$

Finalment, multipliquem per la mitjana aritmètica A i obtenim:

$$\frac{A}{H}\leq\frac{3Ab}{4cd\sin^2 B}=\frac{b(b+c+d)}{4cd\sin^2 B}= = \frac{\dfrac{b}{2\sin B}}{\dfrac{2cd\sin B}{b+c+d}}=\frac{R}{2r}$$

que és la desigualtat demanada.

A104. (Proposat per la redacció.) Tenim un quadrilàter en el pla i construïm quadrats sobre els seus costats a l'exterior d'aquest quadrilàter. Demostreu que els segments que uneixen els centres de quadrats construïts sobre costats oposats del quadrilàter són perpendiculars i de la mateixa longitud.

Solució 1: (Solució de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.) Assignem als vèrtexs consecutius i donats en sentit antihorari, A, B, C i D, del quadrilàter i als centres A', B', C' i D' dels quadrats construïts sobre els costats AB, BC, CD i DA els nombres complexos a, b, c, d, a', b', c' i d' respectivament. El vector $\overrightarrow{A'A}$, representat pel nombre complex $a-a'$, s'obté en girar un angle recte en sentit antihorari el vector $\overrightarrow{A'B}$, representat pel nombre complex $b-a'$. Per tant,

$$a-a' = i\left(b-a'\right)$$

és a dir

$$a' = \frac{a+b}{2}+i\,\frac{a-b}{2}\,.$$

De la mateixa manera,

$$b' = \frac{b+c}{2}+i\,\frac{b-c}{2}\,,\quad c' = \frac{c+d}{2}+i\,\frac{c-d}{2}\quad\text{i}$$

$$d' = \frac{d+a}{2}+i\,\frac{d-a}{2}\,.$$

Aleshores,

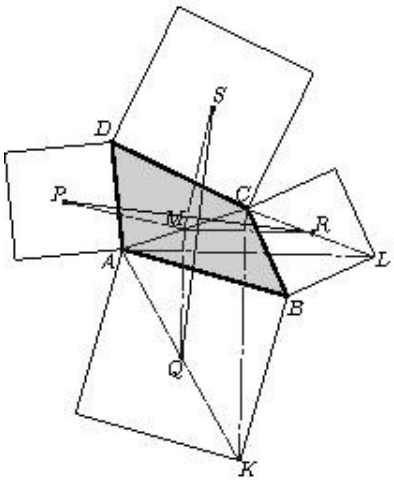
$$c'-a' = \frac{c+d}{2}-\frac{a+b}{2}+i\left(\frac{c-d}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=$$

$$= \frac{d-a}{2} - \frac{b-c}{2} + i\left(\frac{b+c}{2} - \frac{d+a}{2}\right) =$$
$$= i\left(\frac{b+c}{2} - \frac{d+a}{2} + i\left(\frac{b-c}{2} - \frac{d-a}{2}\right)\right) =$$
$$= i\left(b' - d'\right)$$

mostrant que el vector $\overrightarrow{A'C'}$ s'obté en girar el vector $\overrightarrow{D'B'}$ un angle recte en sentit antihorari, cosa que implica que els segments $A'C'$ i $D'B'$ són perpendiculars i de la mateixa longitud.

Solució 2: (Solució de la redacció.)

Siguin A, B, C i D els vèrtexs del quadrilàter, P, Q, R i S els centres dels quadrats construïts sobre els seus costats, AC una de les diagonals del quadrilàter, M el punt mitjà d'aquesta diagonal, sigui K el vèrtex oposat a A en el quadrat construït sobre el costat AB i L el vèrtex oposat a C en el quadrat construït sobre el costat CB.



Considerem els triangles $\triangle KBC$ i $\triangle ABL$. Com que són costats de sengles quadrats, $BK = BA$ i $BC = BL$. D'altra banda,

$$\widehat{CBK} = \frac{\pi}{2} + \widehat{ABC} = \widehat{ABC} + \frac{\pi}{2} = \widehat{ABL}$$

i, en conseqüència, els triangles $\triangle KBC$ i $\triangle ABL$ són congruents i, a més, les parelles de costats homòlegs són perpendiculars. En resulta

$$KC = AL \quad \text{i} \quad KC \perp AL\,.$$

Considerem ara els triangles $\triangle KAC$ i $\triangle ACL$. Com que QM és la paral·lela mitjana relativa a la base KC del triangle $\triangle KAC$ i MR és la paral·lela mitjana relativa a la base AL del $\triangle ACL$, tenim

$$QM = \frac{1}{2}KC = \frac{1}{2}AL = MR \quad \text{i}$$
$$QM \parallel KC \perp AL \parallel MR$$

i un raonament del tot paral·lel porta a que

$$PM = MS \quad \text{i} \quad PM \perp MS$$

Considerem, finalment, els triangles $\triangle QMS$ i $\triangle RMP$. D'una banda, ja tenim que $MQ = MR$ i que $MS = MP$. Ara bé,

$$\widehat{QMS} = \frac{\pi}{2} + \widehat{RMS} = \widehat{RMS} + \frac{\pi}{2} = \widehat{RMP}$$

i els triangles $\triangle QMS$ i $\triangle RMP$ són congruents i, a més, les parelles de costats homòlegs són perpendiculars. En resulta

$$QS = PR \quad \text{i} \quad QS \perp PR\,.$$

Notes: (Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) El problema **A104** l'he trobat resolt de tres maneres diferents: una solució euclídia i una amb nombres complexos apareixen al llibre:

• Diego Martín, Braulio Luis de & Gordillo Florencio, Elías José.: *Problemas de Oposiciones 1986-1987*. Madrid: Ed. Deimos, 1988, 206–209.

La tercera solució aplica rotacions i simetries i és a:

• Yaglom, I., M.: *Geometric Transformations I*. The Mathematical Association of America, 1962. (New Mathematical Library). A les pàgines 39–40 l'enunciat i a la 95 i 96 la solució.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga